第 55 卷　第 6 期　　中山大学学报（自然科学版）　　Vol. 55　No. 6
2016 年　11 月　　ACTA　SCIENTIARUM　NATURALIUM　UNIVERSITATIS　SUNYATSENI　　Nov.　2016

DOI:10.13471/j.cnki.acta.snus.2016.06.007

一类具阻尼项的三阶非线性中立型泛函微分方程的振动性*

林文贤
（韩山师范学院数学与统计学院，广东 潮州 521041）

摘　要：作为机械、电子振荡的数学模型——泛函微分方程的振动性研究在理论和实际中都有着重要意义。研究一类具连续分布滞量和阻尼项的三阶非线性中立型泛函微分方程的振动性，利用广义 Riccati 变换、H 函数和积分平均技巧，建立了保证该类方程的所有解振动或收敛于零的若干新的充分条件，推广和改进了最近文献的结果。

关键词：三阶中立型方程；阻尼项；分布时滞；振动性

中图分类号：O175.10　　**文献标志码：**A　　**文章编号：**0529－6579（2016）06－0052－05

Oscillations of certain third order nonlinear neutral functional differential equations with damping

LIN Wenxian
（College of Mathematics and Statistics, Hanshan Normal University, Chaozhou 521041, China）

Abstract: The research on oscillation for general mechanical and electronic vibration mathematical models, which are usually functional differential equations, has important implications in both theory and practice. The oscillation of third-order nonlinear neutral functional differential equations with continuous distributed delay and damping terms is studied. By using the generalized Riccati transformation, H-function and integral averaging technique, some new sufficient conditions which insure that any solution of such equation oscillates or converges to zero are established. The corresponding known results are extended and improved.

Key words: third-order neutral equations; damping terms; distributed delay; oscillation

近年来，三阶泛函微分方程的振动性受到许多学者的关注，最近的成果参看文献［1－7］，但是，具有分布式中立项和阻尼项的三阶微分方程的振动性尚未见到有关研究结果。本文将考虑一类具有分布式中立项和阻尼项的三阶非线性泛函微分方程

$$\left[r(t)\left(x(t)+\int_a^b p(t,\mu)x[\tau(t,\mu)]\mathrm{d}\mu\right)''\right]'+m(t)\left(x(t)+\int_a^b p(t,\mu)x[\tau(t,\mu)]\mathrm{d}\mu\right)''+\int_c^d q(t,\xi)f(x[\sigma(t,\xi)])\mathrm{d}\xi=0,\ t\geqslant t_0 \quad (1)$$

本文总假设下列条件成立：

（H1）$r(t)\in C^1([t_0,\infty),(0,\infty))$, $m(t)\in C([t_0,\infty),[0,\infty))$, $r'(t)\geqslant 0$,

$$\int_{t_0}^{\infty}\frac{1}{r(t)}\exp\left(-\int_{t_0}^{t}\frac{m(s)}{r(s)}\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t=\infty;$$

（H2）$p(t,\mu)\in C([t_0,\infty)\times[a,b],\mathbf{R})$, $0\leqslant p(t)\equiv\int_a^b p(t,\mu)\mathrm{d}\mu\leqslant p<1$;

* **收稿日期：**2016－04－21
基金项目：广东省高等教育教学改革资助项目（GDJG20142396）；广东省高等学校特色创新资助项目（2014GXJK125）；广东省自然科学基金资助项目（S2013010013372）
作者简介：林文贤（1966 年生），男；**研究方向：**泛函微分方程理论及其应用；E-mail：linwx66@163.com

（H3）$\tau(t,\mu) \in C([t_0,\infty)\times[a,b],\mathbf{R})$ 关于 μ 非减，且 $\tau(t,\mu) \leqslant t$，$\lim_{t\to\infty,\mu\in[a,b]}\min \tau(t,\mu) = \infty$；

（H4）$q(t,\xi) \in C([t_0,\infty)\times[c,d],(0,\infty))$；

（H5）$\sigma(t,\xi) \in C([t_0,\infty)\times[c,d],\mathbf{R})$ 关于 ξ 非减，且 $\sigma(t,\eta) \leqslant t$，$\lim_{t\to\infty,\xi\in[c,d]}\min \sigma(t,\xi) = \infty$；

（H6）$f \in C(\mathbf{R},\mathbf{R})$，$\dfrac{f(u)}{u} \geqslant \delta > 0, u \neq 0$。

定义函数

$$y(t) = x(t) + \int_a^b p(t,\mu)x[\tau(t,\mu)]\mathrm{d}\mu \quad (2)$$

称方程（1）的解是指函数 $x(t) \in C^1[T_x,\infty), T_x \geqslant t_0$，使得 $r(t)y''(t) \in C^1[T_x,\infty)$ 且在 $[T_x,\infty)$ 上满足方程（1）。本文只考虑方程（1）满足性质 $\sup\{|x(t)|: t \geqslant T\} > 0$ 对一切 $T \geqslant T_x$ 成立的解。方程（1）的一个解称为振动，如果它在 $[T_x,\infty)$ 上有任意大的零点。否则，称它为非振动。

文献［8］给出了方程（1）当 $m(t) = 0$ 时的特殊情形的一切解振动或者收敛于零的充分条件，本文的目的是利用广义 Riccati 变换和积分平均技巧建立使得方程（1）的一切解振动或收敛于零的充分条件，推广和包含文献［8］的结果。

1　若干引理

引理 1　设 $x(t)$ 是方程（1）的最终正解，则由式（2）定义的 $y(t)$ 只能有下列两种类型：

（Ⅰ）$y(t) > 0, y'(t) > 0, y''(t) > 0$；

（Ⅱ）$y(t) > 0, y'(t) < 0, y''(t) > 0$。

证明　设 $x(t)$ 是方程（1）上的最终正解，于是存在 $t_1 > t_0$，使得当 $t \geqslant t_1$ 时，有 $y(t) > x(t) > 0$，且

$$[r(t)y''(t)]' + m(t)y''(t) \leqslant -\int_c^d q(t,\xi)f(x[\sigma(t,\xi)])\mathrm{d}\xi < 0$$

则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\exp\left(\int_{t_1}^t \frac{m(s)}{r(s)}\mathrm{d}s\right)r(t)y''(t)\right) < 0$$

因此，$\exp\left(\int_{t_1}^t \frac{m(s)}{r(s)}\mathrm{d}s\right)r(t)y''(t)$ 是减函数，且最终定号，所以有两种可能，即存在 $t_2 > t_1$，使得当 $t \geqslant t_2$ 时，有 $y''(t) < 0$ 或 $y''(t) > 0$．如果 $y''(t) < 0$，则存在常数 $M > 0$ 使得

$$\exp\left(\int_{t_2}^t \frac{m(s)}{r(s)}\mathrm{d}s\right)r(t)y''(t) \leqslant -M < 0$$

在 $[t_2,t)$ 上对上式积分，有

$$y'(t) \leqslant y'(t_2) - M\int_{t_2}^t \frac{1}{r(s)}\exp\left(-\int_{t_2}^s \frac{m(v)}{r(v)}\mathrm{d}v\right)\mathrm{d}s$$

上式中，令 $t\to\infty$，利用假设条件（H1），有 $y'(t)\to-\infty$，因此，$y'(t)$ 最终为负。但是，由 $y'(t)$ 和 $y''(t)$ 最终为负，可知 $y(t)$ 最终为负，此与 $y(t) > 0$ 的假设矛盾，故有 $y''(t) > 0$。因此，$y(t)$ 只能有（Ⅰ）和（Ⅱ）两种类型，引理 1 证毕。

引理 2　设 $x(t)$ 是方程（1）的最终正解，相应的 $y(t)$ 具有（Ⅱ）型性质。如果

$$\int_{t_0}^\infty\int_v^\infty\left(\frac{1}{r(u)}\int_u^\infty\int_c^d q(t,\xi)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \infty \quad (3)$$

则 $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$。

证明　设 $x(t)$ 是方程（1）的最终正解。因当 $t \geqslant t_1 > t_0$ 时，有 $y(t) > 0, y'(t) < 0$，则存在有限极限 $\lim_{t\to\infty} y(t) = l$，可断言 $l = 0$。事实上，如果 $l > 0$，则对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $t_1 > t_0$，使得存在 $t_2 > t_1$，使得当 $t \geqslant t_2$ 时，有 $l + \varepsilon > y(t) > l$ 最终成立。选取 $0 < \varepsilon < \dfrac{l(1-p)}{p}$，则有

$$x(t) = y(t) - \int_a^b p(t,\mu)x[\tau(t,\mu)]\mathrm{d}\mu >$$

$$l - \int_a^b p(t,\mu)y[\tau(t,\mu)]\mathrm{d}\mu \geqslant l - p(t)y[\tau(t,a)] \geqslant$$

$$l - p(l+\varepsilon) = K(l+\varepsilon) > Ky(t) \quad (4)$$

其中 $K = \dfrac{l-p(l+\varepsilon)}{l+\varepsilon} > 0$。利用假设条件（H5）和式（4），方程（1）可得

$$(r(t)y''(t))' + m(t)y''(t) \leqslant -K\delta\int_c^d q(t,\xi)y[\sigma(t,\xi)]\mathrm{d}\xi$$

注意到假设条件（H4）和 $y(t)$ 是（Ⅱ）型，得到

$$(r(t)y''(t))' + m(t)y''(t) \leqslant -K\delta y[\sigma(t,d)]\int_c^d q(t,\xi)\mathrm{d}\xi$$

令 $z(t) = \exp\left(\int_{t_2}^t \frac{m(v)}{r(v)}\mathrm{d}v\right)$，则上式可写成

$$(r(t)y''(t)z(t))' \leqslant -K\delta z(t)y[\sigma(t,d)]\int_c^d q(t,\xi)\mathrm{d}\xi, t \geqslant t_1 \quad (5)$$

从 t 到 ∞ 对式（5）积分产生

$$-r(t)y''(t)z(t) + K\delta\int_t^\infty y[\sigma(s,d)]z(s)\int_c^d q(s,\xi)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s \leqslant 0$$

利用 $y[\sigma(s,d)] \geqslant l$，有

$$-y''(t) + \frac{K\delta l}{r(t)z(t)}\int_t^\infty z(s)\int_c^d q(s,\xi)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s \leqslant 0$$

又由 $z'(t) \geqslant 0$，可得

$$-y''(t) + \frac{K\delta l}{r(t)}\int_t^\infty\int_c^d q(s,\xi)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s \leqslant 0 \quad (6)$$

从 t_2 到 ∞ 对式（6）积分，有

$$\int_{t_2}^{t}\int_{v}^{\infty}\left(\frac{1}{r(u)}\int_{u}^{\infty}\int_{c}^{d}q(s,\xi)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v \leqslant \frac{y(t_2)}{K\delta l}$$

此与条件（3）矛盾。因此，$l=0$。又因 $0 \leqslant x(t) \leqslant y(t)$，即有 $\lim\limits_{t\to\infty}x(t)=0$。引理 2 证毕。

引理 3[9] 设 $u(t)>0,u'(t)>0,u''(t)\leqslant 0,t\geqslant t_0,g(t)\in C([t_0,\infty),[0,\infty))$，则对任一 $\alpha\in(0,1)$ 存在 $T_\alpha \geqslant t_0$，使得

$$u(g(t)) \geqslant \alpha\frac{g(t)}{t}u(t),\quad t\geqslant T_\alpha$$

引理 4[10] 设 $u(t)>0,u'(t)>0,u''(t)>0,u'''(t)\leqslant 0,t\geqslant T_\alpha$，则存在 $\beta\in(0,1)$ 和 $T_\beta \geqslant T_\alpha$，使得 $u(t)\geqslant \beta t u'(t),t\geqslant T_\beta$。

下面利用积分平均技巧，给出方程（1）的新的振动结果。为此引进如下一类函数 X。令

$$D=\{(t,s)\mid t\geqslant s\geqslant t_0\},$$
$$D_0=\{(t,s)\mid t>s\geqslant t_0\}$$

函数 $H\in C^1(D,\mathbf{R})$ 称为属于 X 类，记作 $H\in X$，如果

(i) $H(t,t)=0,t\geqslant t_0$；

$H(t,s)>0,(t,s)\in D_0$；

(ii) $\dfrac{\partial H(t,s)}{\partial s}\leqslant 0,(t,s)\in D$，存在函数 $h\in C(D_0,\mathbf{R})$，使得 $-\dfrac{\partial H(t,s)}{\partial s}=h(t,s)\sqrt{H(t,s)}$。

2 主要结果

定理 1 设式（3）成立，且存在函数 $H\in X$ 和 $\rho\in C^1([t_0,\infty),(0,\infty))$，使得

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{H(t,t_0)}\cdot \int_{t_0}^{t}\left[H(t,s)\rho(s)Q(s)-\frac{1}{4}\rho(s)r(s)h_1^2(t,s)\right]\mathrm{d}s=\infty \tag{7}$$

其中

$$Q(t)=\alpha\beta\delta(1-p)\frac{\sigma^2(t,c)}{t}\int_c^d q(t,\xi)\mathrm{d}\xi \tag{8}$$

和

$$h_1(t,s)=h(t,s)-\left(\frac{\rho'(s)}{\rho(s)}-\frac{m(s)}{r(s)}\right)\sqrt{H(t,s)} \tag{9}$$

这里的 α 和 β 分别由引理 3 和引理 4 定义，则方程（1）的每一解 $x(t)$ 振动，或者当 $t\to\infty$ 时 $x(t)\to 0$。

证明 设方程（1）存在非振动解 $x(t)$，不失一般性，设 $x(t)$ 最终为正（当 $x(t)$ 最终为负时可以类似地证明），故当 $t\geqslant t_1$ 时有 $x(t)>0$，且 $x[\tau(t,\mu)]>0,(t,\mu)\in[t_1,\infty)\times[a,b]$，$x[\sigma(t,\xi)]>0,(t,\xi)\in[t_1,\infty)\times[c,d]$。函数 $y(t)$ 由式（2）定义。由引理 1，$y(t)$ 可能为（Ⅰ）型或（Ⅱ）型。

首先，设 $y(t)$ 为（Ⅰ）型，有

$$x(t)=y(t)-\int_a^b p(t,\mu)x[\tau(t,\mu)]\mathrm{d}\mu \geqslant \left(1-\int_a^b p(t,\mu)\mathrm{d}\mu\right)y(t)\geqslant(1-p)y(t) \tag{10}$$

利用假设条件（H5）和（H6），有

$$(r(t)y''(t))'+m(t)y''(t)\leqslant -\delta(1-p)y[\sigma(t,c)]\int_c^d q(t,\xi)\mathrm{d}\xi\equiv -q_1(t)y[\sigma(t,c)] \tag{11}$$

其中

$$q_1(t)=\delta(1-p)\int_c^d q(t,\xi)\mathrm{d}\xi \tag{12}$$

令

$$W(t)=\rho(t)\frac{r(t)y''(t)}{y'(t)},t\geqslant t_1 \tag{13}$$

则由式（11）得

$$W'(t)=\rho(t)\frac{[r(t)y''(t)]'}{y'(t)}+\rho'(t)\frac{r(t)y''(t)}{y'(t)}-\rho(t)\frac{r(t)(y''(t))^2}{(y'(t))^2}\leqslant -\frac{\rho(t)q_1(t)y([\sigma(t,c)])}{y'(t)}+\left(\frac{\rho'(t)}{\rho(t)}-\frac{m(t)}{r(t)}\right)W(t)-\frac{W^2(t)}{\rho(t)r(t)} \tag{14}$$

在引理 3 中，令 $u(t)=y'(t),g(t)=\sigma(t,c)$，则有 $u(t)>0,u'(t)>0$，由式（5）有

$$[r(t)y''(t)z(t)]'=[r'(t)+m(t)]y''(t)z(t)+r(t)z(t)y'''(t)\leqslant 0$$

由（H1）中的条件 $r'(t)\geqslant 0$ 和 $m(t)\geqslant 0$ 推出 $u''(t)=y'''(t)\leqslant 0$，于是

$$\frac{1}{y'(t)}\geqslant\frac{\alpha\sigma(t,c)}{ty'([\sigma(t,c)])},\ t\geqslant T_\alpha\geqslant t_1 \tag{15}$$

在引理 4 中，令 $u(t)=y(t)$，有

$$y[\sigma(t,c)]\geqslant\beta\sigma(t,c)y'[\sigma(t,c)],t\geqslant T_\beta\geqslant T_\alpha \tag{16}$$

联合式（14）－（16），得到

$$W'(t)\leqslant-\rho(t)Q(t)+\left(\frac{\rho'(t)}{\rho(t)}-\frac{m(t)}{r(t)}\right)W(t)-\frac{W^2(t)}{\rho(t)r(t)},t\geqslant T_\beta \tag{17}$$

其中 $Q(t)$ 由式（8）定义。记

$$A(t)=\frac{\rho'(t)}{\rho(t)}-\frac{m(t)}{r(t)},$$

$$B(t) = \frac{1}{\rho(t)r(t)} \tag{18}$$

当 $t \geqslant t_2 \geqslant T_\beta$，有

$$\int_{t_2}^{t} H(t,s)\rho(s)Q(s)\mathrm{d}s \leqslant$$

$$\int_{t_2}^{t} H(t,s)[-W'(s)+A(s)W(s)-B(s)W^2(s)]\mathrm{d}s =$$

$$H(t,t_2)W(t_2) -$$

$$\int_{t_2}^{t}\left[\sqrt{H(t,s)B(s)}W(s)+\frac{h_1(t,s)}{2\sqrt{B(s)}}\right]^2\mathrm{d}s + \int_{t_2}^{t}\frac{h_1^2(t,s)}{4B(s)}\mathrm{d}s \tag{19}$$

其中 $h_1(t,s)$ 由式（9）定义。因此

$$\frac{1}{H(t,t_2)}\int_{t_2}^{t}\left[H(t,s)\rho(s)Q(s) - \frac{h_1^2(t,s)}{4B(s)}\right]\mathrm{d}s \leqslant W(t_2)$$

显然，上式与条件（7）矛盾。

其次，若 $y(t)$ 为（Ⅱ）型。由引理 2 知 $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0$。定理 1 证毕。

定理 2　设除条件（7）外定理 1 的其他条件都满足，又设对每一 $T > t_2$，有

$$0 < \inf_{s\geqslant T}\left[\liminf_{t\to\infty}\frac{H(t,s)}{H(t,T)}\right] \leqslant \infty \tag{20}$$

和

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{H(t,T)}\int_T^t \rho(s)r(s)h_1^2(t,s)\mathrm{d}s < \infty \tag{21}$$

如果存在 $\varphi \in C([t_0,\infty),\mathbf{R})$，使得

$$\limsup_{t\to\infty}\int_T^t \frac{\varphi_+^2(s)}{\rho(s)r(s)}\mathrm{d}s = \infty \tag{22}$$

其中 $\varphi_+(s) = \max\{\varphi(s),0\}$，且

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{H(t,T)}\int_T^t\left[H(t,s)\rho(s)Q(s) - \frac{1}{4}\rho(s)r(s)h_1^2(t,s)\right]\mathrm{d}s \geqslant \varphi(T) \tag{23}$$

则方程（1）的每一解 $x(t)$ 振动，或者当 $t\to\infty$ 时 $x(t)\to 0$。

证明　同定理 1 的证明一样，对于 $y(t)$ 为（I）型的情况有式（19）成立，则对每一 $T > t_2$，有

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{H(t,T)}\int_T^t\left[H(t,s)\rho(s)Q(s) - \frac{1}{4}\rho(s)r(s)h_1^2(t,s)\right]\mathrm{d}s \leqslant$$

$$W(T) - \liminf_{t\to\infty}\frac{1}{H(t,T)}\cdot$$

$$\int_T^t\left[\sqrt{H(t,s)B(s)}W(s)+\frac{h_1(t,s)}{2\sqrt{B(s)}}\right]^2\mathrm{d}s$$

利用式（23），得到

$$W(T) \geqslant \varphi(T) + \liminf_{t\to\infty}\frac{1}{H(t,T)}\cdot$$

$$\int_T^t\left[\sqrt{H(t,s)B(s)}W(s)+\frac{h_1(t,s)}{2\sqrt{B(s)}}\right]^2\mathrm{d}s$$

因此

$$\liminf_{t\to\infty}\frac{1}{H(t,T)}\cdot$$

$$\int_T^t\left[\sqrt{H(t,s)B(s)}W(s)+\frac{h_1(t,s)}{2\sqrt{B(s)}}\right]^2\mathrm{d}s < \infty \tag{24}$$

定义

$$u(t) = \liminf_{t\to\infty}\frac{1}{H(t,T)}\int_T^t H(t,s)B(s)W^2(s)\mathrm{d}s,$$

$$v(t) = \liminf_{t\to\infty}\frac{1}{H(t,T)}\int_T^t \sqrt{H(t,s)}h_1(t,s)W(s)\mathrm{d}s$$

由式（24），知 $\liminf\limits_{t\to\infty}\int_{t_1}^t[u(t)+v(t)]\mathrm{d}s < \infty$。证明的剩下部分类似于文献［11］中相关定理的证明，因此省略。

如果 $y(t)$ 为(Ⅱ)型，由引理 2 得 $\lim\limits_{t\to\infty}x(t) = 0$。定理 2 证毕。

定理 3　设除式（20）外定理 2 的其他条件都满足，且

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{H(t,T)}\int_T^t H(t,s)\rho(s)Q(s)\mathrm{d}s < \infty$$

则方程（1）的每一解 $x(t)$ 振动，或者当 $t\to\infty$ 时 $x(t)\to 0$。

证明　证明过程类似定理 2，故省略。

注 1　若取 $H(t,s) = (t-s)^n$，则定理的 Philos 型条件简化为 Kamenev 型条件。H 的其他选择如下：

$$H(t,s) = \left(\ln\frac{s}{t}\right)^n;$$

$$H(t,s) = (\sqrt{t}-\sqrt{s})^n;$$

$$H(t,s) = \left(\int_s^t \frac{\mathrm{d}u}{\theta(u)}\right)^n$$

其中 $n > 1, \theta \in C([T,\infty),\mathbf{R}^+)$，满足

$$\lim_{t\to\infty}\int_{t_0}^t \frac{\mathrm{d}u}{\theta(u)} = \infty。$$

参考文献：

［1］ AKTAS M F, TIRYAKI A, ZAFER A. Oscillation criteria for third order nonlinear functional differential equations［J］. Appl Math Letters, 2010, 23(7):756－762.

［2］ DZURINA J. Asymptotic properties of the third order delay differential equations［J］. Nonlinear Anal, 1996, 26(1): 33－39.

[3] PARHI N, PADHI S. On asymptotic behavior of delay differential equations of third order 1 [J]. Nonlinear Anal, 1998, 34(3): 391 - 403.

[4] PARHI N, PADHI S. On asymptotic behavior of solutions of third order delay differential equations [J]. Indian J Pure Appl Math, 2002, 33:327 - 332.

[5] 林文贤. 三阶非线性中立型阻尼泛函微分方程的振动性[J]. 安徽大学学报(自然科学版), 2015, 39(3): 5 - 9.

[6] 杨甲山. 具正负系数和阻尼项的高阶微分方程的振动定理[J]. 中山大学学报(自然科学版),2012,51(1): 30 - 34.

[7] 邱仰聪,王其如. 一类二阶非线性时标动态方程新的 Kamenev 型振动准则[J]. 中山大学学报(自然科学版), 2013, 52(6): 26 - 29.

[8] ZHANG Q X, GAO L, YU Y H. Oscillation criteria for third-order neutral differential equations with continuously distributed delay [J]. Applied Mathematics Letters, 2012, 25(10): 1514 - 1519.

[9] ERBE L. Oscillation criteria for second order nonlinear delay equations [J]. Canad Math Bull, 1973, 16: 49 - 56.

[10] KIGURADZE I T. On the oscillation of solutions of the equation $\frac{\mathrm{d}^m u}{\mathrm{d}t^m} + a(t) \mid u \mid^m \operatorname{sign} u = 0$ [J]. Math Sb, 1964, 65(2):172 - 187.

[11] PHILOS C G. Oscillation theorems for linear differential equation of second order [J]. Arch Math, 1989, 53(5): 482 - 492.

(上接第 51 页)

[18] LAWLER G F, SCHRAMM O, WERNER W. Conformal invariance of planar loop-erased random walks and uniform spanning trees [J]. Annals of Probability, 2002, 32(1B): 939 - 995.

[19] SCHRAMM O, SHEFFIELD S. The harmonic explorer and its convergence to SLE(4) [J]. Annals of Probability, 2003, 33(6): 2127 - 2148.

[20] SCHRAMM O, SHEFFIELD S. Contour lines of the two-dimensional discrete Gaussian free field [J]. Acta Mathematica, 2009, 202(1): 21 - 137.

[21] SMIRNOV S. Conformal invariance in random cluster models. I. Holmorphic fermions in the Ising model [J]. Ann of Math, 2010, 172(2): 1435 - 1467.

[22] BASS R F. Probabilistic techniques in analysis [M]. New York: Springer Science and Business Media, 1995.

[23] REVUZ D, YOR M. Continuous Martingales and Brownian motion, third edition [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1999.

[24] KAGER W, NIENHUIS B. A guide to stochastic Lowner evolution and its applications [J]. Journal of Statistical Physics, 2004,115(5/6): 1149 - 1229.

[25] PRUDNIKOV A P, BRYCHKOV Y A, ARICHEV O I. Integrals and series, Vol 2: special functions [M]. New York: Gordon and Breach Science Publishers, 1990.